1 Sucesiones

Definición. Una sucesión, a, es una función que tiene como dominio el conjunto de los números naturales y como contradominio el conjunto de los números reales: $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se usa la siguiente notación: $a(n) = a_n$.

Los números a_n son llamados elementos o términos a la sucesión.

Ejemplos.

$$a_n = n$$

$$\begin{aligned} a_n &= n! \\ a_n &= \sqrt{n} \\ a_n &= \frac{2n^3 + n^2 + 5}{n^2 + 8} \\ a_n &= \ln(n) \\ a_n &= n^n \end{aligned}$$

Observación. La imagen de toda sucesión es un conjunto finito o numerable.

Tipos de sucesiones

La sucesión a es:

1. Acotada, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Acotada superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Acotada inferiormente *si* $M \leq \; a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. Creciente si $a_{n+1} > a_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$.
5. No decreciente *si* $a_{n+1} \geq \; a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
6. Decreciente $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
7. No creciente si $a_{n+1} \geq \; a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
8. Monótona si se cumple las condiciones 5 o 7.

Ejercicio. Clasifica las siguientes sucesiones de acuerdo a los tipos anteriormente definidos.

$$
\begin{array}{cc}
a_n = sen(n) & a_n = nsen(n) \\
a_n = \dfrac{n+1}{(n^2-1)} & a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+5} \\
a_n = \dfrac{sen(n)}{n} & a_n = \left\{ \begin{array}{ll} 10 & , \text{si } n \in \{1,2,...,100\} \\ n-5-n!, & \text{si } n > 100 \end{array} \right.
\end{array}
$$

Definición.

(1) Una vecindad de un punto $x \in \mathbb{R}$ es cualquier intervalo abierto que contenga a x.

(2) Dado $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, $V_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon)$ se define como la vecindad de radio ϵ del punto x.

(3) Un punto $a \in \mathbb{R}$ es llamado *punto de acumulación* del conjunto $X \subset \mathbb{R}$, si toda vecindad del punto a contiene algún punto del conjunto X, que sea distinto de a.

Observaciones.

(1) No es necesario que el punto a sea elemento del conjunto X.

(2) Si a es punto de acumulación del conjunto X, entonces toda vecindad del punto a contiene infinitos elementos del conjunto X y viceversa.

(3) Un conjunto finito no puede tener puntos de acumulación.

Ejemplos. Determina los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos y observa si estos pertenecen al conjunto.

$$
\begin{array}{cc}
(2,5) & [2,5] \\
\mathbb{R} & \emptyset \\
\mathbb{N} & \mathbb{Q} \\
\left\{ n \diagup (1+n^2) \right\}_{n \epsilon \mathbb{N}} & \{1,2,3\}
\end{array}
$$

Definición. Se les llama *puntos de acumulación de la sucesión,* a, a los puntos de acumulación del conjunto $\mathrm{Im}(a)$, la imagen de la sucesión a.

1.1 Sucesiones acotadas

Ejemplo. La sucesión $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, no tiene puntos de acumulación. Lo mismo ocurre para cualquier otra sucesión que sea constante.

Teorema. Si una sucesión está acotada y la imagen inversa de todo punto del contradominio es un conjunto finito, entonces la sucesión tiene (al menos) un punto de acumulación. Si bajo estas hipótesis la sucesión tiene límite, entonces el límite es un punto de acumulación de la sucesión.

Definición. Si cualquier vecindad del punto L contiene todos los elementos de la sucesión a, excepto un número finito de ellos, se dice que el límite de la sucesión a, cuando n tiende a infinito, es el punto L y se usa la siguiente notación:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Si $V_\epsilon(L)$ denota la vecindad de radio de L, entonces, dada cualquier número $\epsilon > 0$, existe algún número $N(\epsilon)$ tal que $a_n \in V_\epsilon(L)$, para todo natural $n > N(\epsilon)$. Equivalentemente:

Dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N(\epsilon)$ tal que $n \geq N(\epsilon)$ implica que $|a_n - L| < \epsilon$.

En este caso se dice que *la sucesión a_n converge al número L*. Si ningún número real L cumple esta definición, se dice que la sucesión no es convergente o que *no tiene límite*; algunos autores a estas sucesiones las llaman sucesiones *divergentes.*

Observación. El límite de toda sucesión constante es la constante misma, pero como ya se observó anteriormente, estas sucesiones no tienen ningún punto de acumulación.

Ejemplo. Si $a_n = 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\ a_n = 0$. En este caso $L = 0$ es tanto, el límite de esta sucesión, como un punto de acumulación.

Ejercicio. Considera la sucesión $a_n = \dfrac{2n^3 + n^2 + 5}{3n^3 + 8}$ y verifica con una calculadora que $\lim\ a_n = 2/3$. ¿Cómo podrías anticiparlo?

Ejemplo. Observa que la sucesión $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ no tiene límite, es decir no existe ningún numero real L que cumpla que $L = \lim\ a_n$. Sin embargo, tanto 1 como -1 son puntos de acumulación de esta sucesión.

Observación. (Unicidad del límite). Una sucesión puede tener múltiples puntos de acumulación pero si tiene límite, este es único, no puede tener dos límites distintos.

Ejemplo. Considera la sucesión a_n definida de la siguiente manera: $a_n = 1$ para todos los números n que sean pares y $a_n = 1/n$, para los números impares. Esta sucesión tiene un único punto de acumulación pero no tiene límite.

Observación. Como el dominio de las sucesiones es un conjunto discreto, solamente tiene sentido analizar su comportamiento límite cuando la variable n

tiende a infinito. De hecho, puede pensarse que el punto al infinito es una especie de punto de acumulación del conjunto $\mathbb{N}$. Para darle sentido a esta consideracion se debe entender el conjunto de números naturales, n, que cumplen que son mayores que un natural fijo N como una vecindad del punto al infinito.

Notación. Ya que el conjunto de los números naturales no tiene ningún punto de acumulación, para las sucesiones, sólo tiene sentido analizar su comportamiento límite cuando la variable, n, tiende a infinito. Por esta razón puede uno simplificar la notación y escribir la expresión $\lim a_n = L$, sobrentendiendo que el límite es cuando $n \to \infty$.

1.2 Operaciones aritméticas con los límites

Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes con $\lim\ a_n = \alpha$ y $\lim\ b_n = \beta$. Entonces:

(1) $\lim (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) $\lim (a_n b_n) = \alpha\beta$

(3) Si β y b_n son distintos de cero para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim (a_n/b_n) = \alpha/\beta$.

Ejercicios.

(1) Demuestra las siguientes proposiciones:

(i) $\lim\ a_n = \infty \implies \lim\ (1/a_n) = 0$
¿Vale la misma implicación cúando $\lim\ a_n = -\infty$?
(ii) $\lim\ a_n = 0$ y $a_n > 0 \implies \lim (1/a_n) = \infty$

(2) Investiga el limite de a_n/b_n cuando:

(i) $\lim a_n = \alpha$ y $\lim b_n = \infty$
(ii) $\lim\ a_n = \infty$ y $\lim b_n = 0$, $b_n > 0$
(iii) $\lim\ a_n = \infty$ y $\lim b_n = 0$, $b_n \neq 0$
(iv) $\lim\ a_n = \infty$ y $\lim b_n = \infty$
(v) $\lim\ a_n = 0$ y $\lim b_n = 0, b_n \neq 0$

Definición. Sea $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función creciente y a_n una sucesión cualquiera. La sucesión $a'_n = a_{k(n)}$ es llamada una *subsucesión* de la sucesión a_n. Así, a partir de cualquier sucesión creciente se puede crear una nueva sucesión haciendo la composición de las dos funciones: $a' = a \circ k$. Evaluando esta composición de funciones en un natural, n, tenemos que:

$$a'_n = a'(n) = [a \circ k](n) = a(k(n)) = a_{k(n)}.$$

Naturalmente la imagen de la sucesión a' es un subconjunto de la imagen de la sucesión a: $\mathrm{Im}(a') \subset \mathrm{Im}(a)$.

Algúnos autores se refieren a las subsucesiones como sucesiones parciales.

Ejemplo. Definimos a_n igual al residuo que resulta al dividir n entre 3; es decir $a_n = 0$ si $n = 3k$; $a_n = 1$ si $n = 3k+1$; $a_n = 2$ si $n = 3k+2$, para algún numero entero k. Esta sucesión tiene tres subsucesiones constantes. ¿Cúales son?

Ejemplos.

(i) $k(n) = 2n \Longrightarrow a'_n = a_{2n}$ es la subsesucesión de a que tiene índices pares.

(ii) $k(n) = 5n+3 \Longrightarrow a'_n = a_{5n+3}$ es la subsucesión de a cuyos índices dejan residuo 3 al dividir por el número 5.

Observación. Toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo limite, esto es:

$$\lim a_n = L \Longrightarrow \lim a_{k(n)} = L, \text{ para toda función creciente } k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Definición: Un punto límite de la sucesión a_n es el límite de una subsucesión convergente.

Ejercicio.

(1) ¿Es posible construir una función $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que sea decreciente?

(2) ¿Cúantos puntos límite puede tener una sucesión? Construye ejemplos.

(3) ¿Si α es punto de acumulación de a_n entonces $\lim a_n = \alpha$? ¿Vale el recíproco?

(4) ¿Si α es punto límite de a_n entonces también es punto de acumulación? ¿Vale el recíproco?

1.2.1 Sucesiones monótonas

Si a_n es una sucesión monótona se tiene la siguiente dicotomía:

(i) Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\ a_n = \alpha$ ó
(ii) La sucesión a_n no está acotada.

La validez de esta proposición es una consecuencia del teorema que se expone a continuación, pero antes conviene analizar el siguiente ejemplo.

Ejercicio. ¿La sucesión $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n}$ es convergente? Analízala geométricamente ¿Cúal es su límite?

Teorema. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Ejemplo. La sucesión $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$ es convergente. Observa que es una sucesión creciente y acotada, ya que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 3.$$

Por el Axioma del Supremo toda sucesión a_n acotada tiene supremo β e ínfimo α.

Teorema. Toda sucesión a_n acotada y creciente es convergente y $\lim a_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$

Demostración. El $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$ tiene la siguiente propiedad:

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } \beta - \epsilon < a_m$$

como a_n es no decreciente $\beta - \epsilon < a_m \leq a_n \; \forall n \geq m$. En consecuencia $a_n \in V_\epsilon(\beta)$ para toda $n \geq m$.

1.3 Sucesiones no acotadas

Definición. Se dice que una sucesión, a_n, tiende a infinito si esta crece sin límite. Esto es: dado cualquier número M (por grande que sea), existe otro número N (dependiente de M) tal que

$$n \geq N(M) \text{ implica que } a_n \geq M.$$

En este caso escribimos:

$$\lim \; a_n = \infty.$$

Similarmente,

$$\lim \; a_n = -\infty$$

si dado cualquier M existe $N(M)$ tal que

$$n \geq N \; (M) \text{ implica que } a_n \leq \; M.$$

Ejercicios.

(1) Analiza el comportamiento de las sucesiones siguientes:

$$a_n = n^2 - n! \quad a_n = n! \diagup n^2 + 1 \quad a_n = \frac{n^n}{n!}$$
$$a_n = \frac{\ln(n)}{n} \quad a_n = \frac{n^3 + n^2 + 1}{n^4 + 5} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

(2) Toda sucesión convergente a_n es acotada: $\exists\ M$ tal que $|a_n| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(3) Si las sucesiones a_n y b_n difieren en sólo en un conjunto finito de índices y $\lim a_n = \alpha$, entonces también $\lim b_n = \alpha$.

(4) El $\lim a_n = \alpha$ si y sólo si el $\lim (a_n - \alpha) = 0$.

(5) Si $\lim a_n = \alpha$ y α es número positivo, entonces existe un número N tal que $n \geq N$ implica que $a_n > 0$. Esto quiere decir que a partir de cierto punto, todos los elementos de la sucesión son positivos. Similarmente, si la sucesión a_n tiene límite y $a_n > a$, a partir de alguna N, $\lim a_n > 0$ ó $\lim a_n = a$. Reciprocamente, si apartir de alguna N, $a_n > a$ y la sucesión tiene límite, entonces $\alpha = \lim a_n \geq a$.

(6) Si a_n y b_n son convergentes y $a_n \leq b_n$, a partir de cierta N, entonces $\lim a_n \leq \lim b_n$.

(7) Si $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim a_n = \lim c_n = L$ entonces $\lim b_n = L$.

1.4 Criterios de convergencia

1.4.1 Criterio de Cauchy

Definición. Se dice que una sucesión a_n es de Cauchy si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N\ (\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad si \quad n > N\ y\ m > N$.

Teorema. Que una sucesión sea de Cauchy es una condición necesaria y suficiente para que sea convergente.

Observación. Esta definición de la condición de Cauchy no hace mención de L, el límite de la sucesión a_n.

Observación. La demostración de que sea una condición necesaria es muy sencilla, pero para demostrar que es una condición suficiente se requiere argumentar la continuidad de la recta (completez del conjunto $\mathbb{R}$), lo cual se debe basar en algún postulado que garantize que "la recta no tiene "huecos".

Ejercicio. Demuestra que la condición de Cauchy es necesaria para que una sucesión sea convergente (usa la desiguladad del triángulo) y que es una condición suficiente usando el Axioma del Supremo.

Ejercicios:

1. Escriba la definición de que p_0 sea punto de acumulación de un conjunto.
2. Encuentra el conjunto de puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

   a) $\mathbb{Q}$ b) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{N}$ e) $\mathbb{Z}$ f) $[a, b]$ g) (a, b)
3. a) ¿Es cierto que si una sucesión converge a l entonces l es punto de acumulación?

   b) ¿Es cierto que si la imagen de una sucesión tiene un punto de acumulación entonces la sucesion converge ?
4. Hallar el término general de las siguientes sucesiones:

   a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}...$ b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}...$ c) $-3, -1, \frac{-1}{3}.0.\frac{1}{5}, ...$
5. Estudia la monotonía, la convergencia o divergencia y las cotas (si existen) de las siguientes sucesiones:

   a) $a_n = \frac{n+2}{2n-1}$ b) $a_n = (-1)^{n-1}2^n$ c) $a_n = n!$ d) $a_n = n^n$
6. Demuestra cada uno de los límites siguientes:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10}{n} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 1 = 1$
7. Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes a l y m respectivamente. Prueba las siguientes propiedades:

   a) $\lim(a_n + b_n) = l + m$ b) $\lim(a_n b_n) = lm$

   c) Si m y b_n son distintos de cero, entonces $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{l}{m}$.
8. Demuestra que:

   a) Si una sucesión es convergente su límite es único.

   b) Si una sucesión es creciente y acotada entonces es convergente. ¿Qué relación tiene el límite de la sucesión con el conjunto imagen de la sucesión?

9. Dar un ejemplo de sucesiones a_n y b_n para las cuales, cuando n tiende a infinito, se tenga:

   a) $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$ y $a_n + b_n \to \infty$

   b) $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$ y $a_n - b_n \to 7$

10. Demuestra que

    a) Si $\lim a_n = \infty$ entonces $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$

    b) Si $\lim a_n = 0$ y $a_n > 0$ entonces $\lim \dfrac{1}{a_n} = \infty$

    Ilustra las propiedades a) y b) con ejemplos.

11. Investiga el límite de $\dfrac{a_n}{b_n}$ cuando

    a) $\lim a_n = l$ y $\lim b_n = \infty$

    b) $\lim a_n = \infty$ y $\lim b_n = 0$; $b_n > 0$

    c) $\lim a_n = \infty$ y $\lim b_n = 0$; $b_n \neq 0$

    d) $\lim a_n = \infty$ y $\lim b_n = \infty$

    e) $\lim a_n = 0$ y $\lim b_n = 0$

2 Series

El concepto de adición de números reales tiene sentido sólo para sumas con un número finito de sumandos, en esta sección se discute la ampliación de éste concepto a sumas que tienen un número infinito de sumandos (términos), es decir, consideraremos las sumas del tipo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ...$$

A esté tipo de sumas, que tienen una colección numerable de términos, las denominaremos con el nombre de *series*. Cada uno de los sumandos son llamados *términos* de la sucesión; el símbolo a_k se conoce como el *término general* de la serie el cual es una función (sucesión) que tiene al símbolo k como variable independiente y es llamada el índice del término a_k. El término general de algunas series puede expresarse mediante una formula que implica operaciones aritméticas y funciones conocidas, como las trigonométricas, la exponencial, los logaritmos, etcétera.

Ejemplos.

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... + 1/2^n + ...$

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + ... + n + ...$

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 ... + (-1)^n + ..$

(4) $\sum_{k=0}^{\infty} sen(k) = sen(1) + sen(2) + ... + sen(n) + ...$

(5) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ...$

(6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{\exp(k)} = 1 + \frac{\ln(2)}{\exp(2)} + \frac{\ln(3)}{\exp(3)} + ... + \frac{1}{\exp(n)} + ...$

Es prácticamente imposible calcular una suma infinita, sin embargo, en lo que sigue veremos como se puede salvar esta dificultad, para poder calcular el valor total de una serie infinita.

Ejemplo. *Análisis geométrico.* La serie del ejemplo (1) se puede interpretar geométricamente de la siguiente manera: Consideramos un segmento de longitud 1 y tomamos la mitad del segmento o sea 1/2, a ésta mitad le sumamos la mitad de la distancia restante es decir, le sumamos 1/4, a ésta suma le agregamos la mitad de lo que nos sobra, 1/8, y así sucesivamente. Esto lo ilustramos gráficamente de la siguiente manera:

1/2 1/4 1/8 1/16

¿A que valor tiende ésta suma cuando el número de términos que vamos sumando tiende a infinito? Gráficamente, se ve claramente que:

(1) El valor de la suma total está acotada y es menor que cualquier número mayor que 1;

(2) A medida que se agrega un sumando, el valor de la suma se acerca cada vez más a 1;

(3) El valor de la suma de n términos se acerca a uno, tanto como queramos, si sumamos un número n de términos suficientemente grande.

Entonces es razonable pensar que el valor total de esta serie es uno. Este análisis nos lleva a la conclusión de que la suma de infinitas cantidades puede tener como resultado una catidad finita. Esta simple conclusión es sorprendente y fue, motivo de muchas discusiones y disputas en la en la Grecia antigua.
Varias de los argumentos de los sofistas griegos se basaban en la no aceptación de que una suma de infinitas cantidades pudiera dar un resultado finitp. Una de las famosas paradojas de Zenón, la paradoja de la zanahoria y el conejo, se basa precisamente en la suma infinta del ejemplo (1).

Analizemos ahora algunas otras de las series expuestas en el ejemplo anterior. Lo que nos importa es observar el comportamiento que va teniendo la suma a medida que agregamos más términos y delucidar si la suma total :

(1) Está acotada o no

(2) Tiene algún comportamiento definido

(3) Converge a algún valor específico

La serie del ejemplo (2) no está acotada: Es muy claro que la suma asume valores cada vez más grandes y que, dado cualquier número M, arbitrariamente grande, sumando suficientes términos de la serie podemos rebasarlo. Así pues, es razonable pensar que si pudiéramos sumar todos sus términos obtendríamos un valor que sería infinitamente grande.

Una situación diferente se presenta en el ejemplo (3). Aquí el valor de la suma va tomando el valor de 1 y de 0, según sea el número de sumandos que consideremos: para todos los términos que tienen un índice par, así ésta suma nó tiende a un valor fijo sino que constantemente cambia de valor entre 1 y 0. Podríamos decir que el valor de la serie "oscila" entre 0 y 1.

Ahora que hemos analizado los ejemplos (1), (2) y (3) podemos contestar a la pregunta de que si las series pueden ó no tener un valor finito y la respuesta es la siguiente:

Existen series cuya suma es un valor finito bién determinado como la serie del ejemplo (2), también existe otro tipo de series en las que su suma no toma un valor finito y aquí encontramos dos tipos de comportamientos: Series que tienen una suma infinita como la del ejemplo (1) y series oscilantes como la del ejemplo (3).

—-

Observando las series anteriores nos podríamos preguntar, sí su suma podría ser un número finito ó bien un número infinito. Veamos que es lo que sucede realmente; para ésto analicemos los ejemplos (1), (2) y (3).

Resumiendo tenemos que existen series que tienden a un valor finito bien determinado y series que no cumplen con está condición.

—

Este comportamiento es típico en las series, de aquí que las clasificamos en dos tipos:

i) Series convergentes.- Que serán todas aquellas series, cuyos términos se acercan a un valor finito tanto como queramos, es decir, que al ir sumando cada vez más términos de la serie nos vamos acercando cada vez más al valor límite por lo tanto su definición formal será:

Definición: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = a \Leftrightarrow$ dada cualquier $\varepsilon > 0 \;\; \exists \; N_\varepsilon \in N$ tal que $|(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) - a| < \varepsilon \;\forall\; n > N_\varepsilon$

ii) Series divergentes.- Que serán todas aquellas que no sean convergentes, o sea, una serie será divergente cunado el valor de su suma no tienda a un valor finito.

2.1 Series convergentes

Sumas parciales.

Frecuentemente para denotar la serie: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ se utiliza el siguiente símbolo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

Consideremos ahora la sucesión S_n definida de la siguiente forma:

$S_1 = a_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i$

$S_2 = a_1 + a_2 = \sum_{i=1}^{2} a_i$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i$

.

.

.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

a ésta sucesión le llamaremos "sucesión de sumas parciales" de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

En términos de ésta sucesión la definición de serie convergente que dimos anteriormente toma la forma:

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a \Leftrightarrow$ dada cualquier $\varepsilon > 0 \;\; \exists \; N_\varepsilon \in N$ tal que $|S_n - a| < \varepsilon \;\forall \; n > N_\varepsilon$

ó lo que es lo mismo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = a$$

Ejemplos:

1) Reconsideremos la serie: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...$

y encontremos el valor de ella calculando el límite de las correspondientes sumas parciales. Para encontrar el término general de la sucesión S_n procedemos de la siguiente manera:

$$S_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n$$

multiplicando esta suma por $1/2$ tenemos:

$$1/2S_n = 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n + 1/2^{n+1}$$

haciendo la resta $S_n - \frac{1}{2}S_n$ se obtiene:

$$S_n - 1/2S_n = 1/2 - 1/2^{n+1}$$

de donde

$$S_n = 1 - 1/2^n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

lo que implica que la serie es convergente, es decir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

2) Analicemos la serie geométrica.

$$\sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + ...$$

Si $r = 1$ entonces es:

$$\sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + ...$$

y no converge, pues considerando suficientes términos podemos rebasar cualquier número dado de antemano.

Si $r \neq 1$ entonces usando el procedimiento del ejemplo anterior, podemos demostrar que :

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Considerando ahora el límite, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

surgen varias posibilidades dependiendo del valor de r.

Si $|r| < 1$ entonces la serie es convergente y

$$\sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}$$

Si $r = -1$ entonces $S_n = 1$ para n par y $S_n = 0$ para n impar. Tenemos entonces que la serie oscila entre 0 y 1.

Si $r > 1$ tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ entonces la serie es divergente.

Nota.- Si S_n es la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ y ocurre que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ entonces diremos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ai = \infty$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ diremos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ai = -\infty$.

Si $r < -1$ tenemos también que la serie es divergente y en este caso tienen oscilaciones de amplitud infinita, pues para n par $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ para n impar.

Ejercicios.

Encontrar el valor de convergencia de las siguientes series

1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^i$

2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (k+i)\ (k-i)$ donde $k = cte$

Sugerencia.- Escriba el término general en sumas parciales para escribir la enésima suma parcial como una suma telescópica.

2.2 Propiedades generales de las series convergentes

i) Si la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = a$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ka_i = ka$

demostración:

$$\sum_{i=1}^{\infty} ka_i = \lim(ka_1 + ka_2 + ... + ka_n) = ka$$

ii) Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = b$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i) = a + b$

demostración: Hágase como ejercicio.

iii)) Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_i = 0$

demostración: Hágase como ejercicio.

Nota.- la condición $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ no es suficiente para garantizar la convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Por ejemplo más adelante demostraremos que la siguiente serie armónica diverge $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + 1/2 + 1/3 + ... = \infty$ y sin embargo

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$$

IV) Si dada la serie convergente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

definimos

$$V_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0$$

demostración: Hágase como ejercicio.

La siguiente propiedad es una traducción para series de la propiedad de Cauchy para sucesiones.

V) La serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente $\Leftrightarrow$ dada culaquier $\varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon \in N$ tal que $|S_n - S_m| < \varepsilon$ para toda pareja n, m tal que $m > n > N_\varepsilon$

Ejemplo:

La serie armónica.

Verificando que la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ...$$

no cumple la propiedad de Cauchy se demuestra que es divergente.

Efectivamente como:

$a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n} = 1/_{n+1} + 1/_{n+2} + ... + 1/2_n > 1/2_n + 1/2_n + ... + 1/2_n = 1/2 \ \forall n \in N$

entonces no podemos afirmar que dada $\varepsilon > 0$ exista $N \in R$ tal que

$|a_n + 1 + a_{n+2} + ... + a_m \mid < \varepsilon \ \forall \ m, n > N$.
Ejercicios.
1) Demostrar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$

2) Averigüe si las siguientes series son convergentes o no. Si son convergentes encuentre el valor de la serie.

a)$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 2^i/3^{i-1}$
b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+1}{2_{i-1}}$
c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i+2^i}{2^i 3^i}$
d)$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^n}$

2.3 Series de términos no negativos

Propiedades y criterios de convergencia.

i) Las series con términos positivos convergen a ún número mayor ó igual que cero, ó divergen a infinito.
Demostración: Hágase como ejercicio.

ii) Si una serie con términos positivos está acotada entonces converge.

Demostración: Hágase como ejercicio.

iii) a) Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ son series con términos no negativos, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge y $a_i \leq b_{i,}\ \forall_i$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente.

Demostración: Hágase como ejercicio.

Nota.- Obviamente no es necesario que la condición $a_i \leq b_i$ se cumpla $\forall i$, $i \in N$, basta que se cumpla la desigualdad a partir de alguna N.

b) Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ son series con términos positivos tales que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \infty$ y $a_i \geq b_i$ para n suficientemente grande, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$

Demostración: Hágase como ejercicio.

Ejemplo:

Considere la siguiente serie.

$$1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + 1/\sqrt{4} + ... + 1/\sqrt{i} + ...$$

observamos que:

$$1/\sqrt{i} \geq 1/i \quad \forall i \in N$$

como sabemos $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ es divergente $\sum_{i=1}^{\infty} (1/i)^{1/2} = \infty$

Si en la propiedad III) tomamos $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ como la serie geométrica, obtenemos el siguiente criterio de convergencia:

IV) Criterio de la raiz.

a) Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es una serie de términos nó negativos, tal que la desigualdad $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ se cumple para toda n suficientemente grande, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente.

b) Si $\sqrt[n]{a_n} \geq r > 1$ para toda n suficientemente grande entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \infty$

Demostración: Hágase como ejercicio.

Ejemplo:
Para la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-2/2_i)^i = -1 + 0 + 1/8 + 1/256 + ...$$

se tiene que $\sqrt[n]{a_n} = n - 2/2_n = 1/2 - 1/n$

$\sqrt[n]{a_n} = n - 2/2_n = 1/2 - 1/n \leq 1/2 < 1 \ \forall n \in N.$

y por lo tanto la serie es convergente.

V) Criterio de la razón.

a) Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es una serie con términos positivos tal que $a_{n+1}/a_n \leq r < 1$ para toda n suficientemente grande entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente.

b) Si $a_{n+1}/a_n \geq r > 1$ para toda n suficientemente grande entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$

Demostración: Hágase como ejercicio.

Sugerencia.- Para demostrar a) utilice que $a_n \leq a_i r^{n-1}$ para comparar la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ con la serie geométrica$\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$, para demostrar b) proceda de forma análoga.
Ejemplo:

Para la serie

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3i} = 1/3 + 2/3^2 + 3/3^4 + ...$

$a_{n+1}/a_n = {}^{n+1}/3^{n+1}3^n/n = {}^{n+1}/n \ 1/3.$

como ${}^{n+1}/n \leq 2 \ \forall n \in N$

y podemos concluir que $\sum_{i=1}^{\infty} i/3i$ es convergente.

Ejercicios:

1) Demostrar que si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es una serie de términos no negativos y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$
$r < 1$
entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente.

2) Demostrar que si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es una serie de términos positivos y $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n =$
$r < 1$
entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente.

3) Averigüe si las siguientes series son convergentes:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i(2/5)^i$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} i!$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} (\ln i)^{-i}$

d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i^2-1}$

e) $\sum_{i=1}^{\infty} (3i/2i+1)^i$

f) $\sum_{i=1}^{\infty} i^p/c^i$

Analice la convergencia para todos los valores posibles de p y c.

2.4 Series con términos de ambos signos

Entre las series convergentes con términos positivos y negativos podemos distinguir dos clases:

1) Aquellas para las que la serie de valores absolutos $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge. Estas son llamadas series absolutamente convergentes.

2) Aquellas para las que, en la convergencia, es determinante al cancelamiento entre términos de signo contrario y para las que entonces $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \infty$

Estas son llamadas series condicionalmente convergentes.

Teorema:
Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ tambien converge.

Demostración: Hágase como ejercicio.

sugerencia: verifique que se cumpla la propiedad de Cauchy

Nota.- Si $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = a$ y $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a'$ésto no implica que $a = |a'|$. Por ejemplo analice la serie:

$$-1/2 - 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...$$

Ejemplo:

Averiguar si la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1 - (2/3)^2 + (3/5)^3 - (4/7)^4 + ...$$

es convergente.

Aplicando el criterio de la raiz a la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ tenemos:

$$|a_n| = (n/2_{n-1})^n,\ \sqrt[n]{|a_n|} =^n /2n - 1 = 1/2 - 1/n$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$$

y podemos concluir que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ es convergente siendo ésta convergente, por el teorema anterior, la serie$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ es convergente.

A las series de la forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

con $a_i \geq 0$ se les conoce como series alternantes. En relación con éste tipo de series existe un resultado interesante.

Teorema: (Criterio de Leibnitz para series alternantes).

Si en una serie alternante $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_n$ ocurre que $\{a_n\}$ converge monótonamente a cero entonces la serie converge.

Demostración: Consulte la bibliografía.

Ejemplo:

La serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}1/i+ = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$$

no es absolutamente convergente pues como vimos anteriormente la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \left|(-1)^{i+1}1/i\right| = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i = \infty$ Sin embargo la serie es altarnante, y el término $a_i = 1/i$ converge monótonamente. Por el criterio de Leibnitz la serie es convergente.

Ejercicios:

Averigüe si las siguientes series son convergentes.

a) $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \ \frac{2_{n-1}}{2^n}$

b) $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \ \frac{2n^2+1}{n^3+3}$

*Esto es que $a_{n+1} > a_n \ \forall n$

BIBLIOGRAFIA:
1) Courant. Introducción al cálculo y al análisis matemático.
2) Lang. A first course in calculus.
3) Kuratowski. Introducción al cálculo.
4) Spivak. Cálculo.
5) Apostol. Calculus.